

DOI: 10.3969/j.issn1000-4874.2014.03.002

对流扩散方程的一种新闻断有限元解法*

朱怡¹, 万德成¹, 黄文华²

(1. 上海交通大学 海洋工程国家重点实验室 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240,
Email: foolinsky@163.com;
2. 湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

摘要: 该文采用标准迎风格式离散对流项, 结合 Bassi 和 Rebay 提出的高效格式离散拉普拉斯算子, 构建了求解对流扩散方程的一种新的间断有限元方法。数值计算的结果表明: 该方法对网格类型的依赖度较小并且精度比较高, 可以使用高阶插值函数得到比较精确的结果; 该方法数值耗散较小, 对于强对流和强间断性的问题, 可以得到很好的结果。

关键词: 对流扩散方程; 间断有限元方法; 高阶插值函数; 强间断

中图分类号: TB115

文献标识码: A

A Novel Discontinuous Galerkin Method for the Convection-Diffusion Equations

ZHU Yi¹, WAN De-Cheng¹, HUANG Wen-Hua²

(1. State Key Laboratory of Ocean Engineering, School of Naval Architecture, Ocean & Civil Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China
2. School of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China)

Abstract: A novel Discontinuous Galerkin Method is developed to solve the convection-diffusion equations. In this method, the convection term is discretized by standard upwind scheme, and the Laplace term is discretized by an effective scheme proposed by Bassi and Rebay. Numerical results show that, this Discontinuous Galerkin Method is insensitive to the element type, and can achieve high accuracy by using high order shape function. Especially, this method has less numerical dissipation than other traditional methods, which is suited to solve the convection dominated problems with strong discontinuity.

Key words: convection-diffusion equations; discontinuous Galerkin method; high order shape function; strong discontinuity

* 收稿日期: 2014-01-06(2014-03-10 修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金项目(11072154, 51379125, 11272120)、上海高校特聘教授岗位跟踪计划(2013022)和国家重点基础研究发展计划(2013CB036103)

作者简介: 朱怡(1982 -), 男, 江苏淮安人, 硕士研究生。

通信作者: 万德成, Email: dcwan@sjtu.edu.cn

Received: January 6, 2014 (Revised March 10, 2014)

Project supported by foundations: Supported by the National Natural Science Foundation of China (11072154, 51379125, 11272120), Program for Professor of Special Appointment at Shanghai Institutions of Higher Learning (2013022) and The National Key Basic Research Development Plan (973 Program) Project of China (2013CB036103)

Biography: ZHU Yi (1989-), Male, Master Candidate.

Corresponding author: WAN De-cheng, Email: dcwan@sjtu.edu.cn

引言

对流扩散方程是一类广泛存在的基本运动方程,其数值计算方法的研究具有重要的意义,可以应用于流体力学、环境科学和电子科学等很多领域。传统的数值计算方法可以实现对流扩散方程的求解,例如有限差分法^[1]、有限体积法^[1]和有限元法^[2]等。然而传统方法在处理对流扩散方程中的对流项时,存在一定的数值耗散,很难达到高阶精度。另外,现实中经常会遇到这样一类对流扩散方程,即对流占主导且初始条件或边界条件变化剧烈甚至是间断的,对于这类问题,基于传统方法得到的数值结果往往变得不合理,甚至存在振荡现象。近年来,间断有限元方法(discontinuous Galerkin method, DGM)越来越多地受到研究者的关注。该方法结合了有限元方法和有限体积法的优点,可以在单元内采用高阶插值函数又不强制要求解空间在单元之间连续,在处理对流项时充分利用了对流项的物理特性,数值耗散较小,精度比较高且特别适合于强对流、强间断初边值问题的求解。

针对对流扩散方程的求解,学者们提出了多种间断有限元方法。Cockburn 和 Shu^[3]在 1998 年提出局部间断有限元方法(local discontinuous Galerkin method, LDG)。该方法是 Runge-Kutta 间断有限元方法^[4,5]在求解对流扩散问题时的扩展。LDG 方法需要引入物理量的梯度做额外变量,从而将二阶偏微分方程转化为多个一阶偏微分方程,虽然可以一次性地求出物理量和物理量的梯度,但是变量个数成倍增加,计算量大,收敛性较差。LDG 采用罚函数方法处理第一类边界条件,因此不能完全满足;对于复杂边界的第二类边界条件,LDG 也不易处理。Cockburn 等对 LDG 方法进行了改进,在 2009 年提出了针对椭圆形方程的混合间断有限元方法^[6](hybridizable discontinuous Galerkin method, HDG)。之后,Nguyen 等^[7]利用 HDG 方法实现了对流扩散方程的求解。HDG 方法通过引入单元边界上数值通量的守恒性方程,提高了方法的收敛性和效率,并且可以处理复杂边界的第二类边界条件。但 HDG 仍然需要对二阶扩散项进行降阶处理,并且计算出数值通量后还需在每个单元内求解局部方程得到所求物理量的值,计算量比较大。另外 HDG 和 LDG 不能完全满足第一类边界条件。Bassi 和 Rebay 等^[8]在 1997 年提出了一种针对拉普拉斯算子的间断有限元离散格式,该方法引入一个双线性算子作为罚函数对拉普拉斯算子进行处理,不用降阶,计算效率较高。对于第一类和第二类边界条件的处理,该方法和有限元方法完全一样。在求解扩散问题时,如果采用 P 阶插值函数,该方法可以达

到 P+1 阶的精度,并且具有一致性的稳定性^[9]。另外 LDG 在稳定性参数的选择方面还存在一定的经验成分,而该方法的稳定性参数则不需要靠经验选择。

本文结合前人的工作成果,提出了一种对流扩散方程的间断有限元解法:即对流项的离散采用间断有限元中的标准迎风格式;扩散项的离散则采用 Bassi 和 Rebay 提出的格式;时间项的离散本文采用了稳定性较好的隐式欧拉方法。通过自主开发,实现了对流扩散方程的求解,并通过数值算例对该方法的精度和收敛性进行了验证。为了验证该方法数值耗散的大小,数值求解了一个对流占主导且带间断初始条件的对流扩散方程,并且与流场迎风 SUPG(stream upwind Petrov-Galerkin)有限元法^[2]的结果进行了对比。

1 数值方法

1.1 非定常对流扩散方程

非定常对流扩散方程的具体形式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (cu) - \nabla \cdot (k \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \times [0, T] \quad (1a)$$

$$u = g_D \quad \text{on } \Gamma_D \quad (1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_N \quad (1c)$$

其中: $\Omega \in R^d$ 是计算域, $\partial\Omega$ 是其边界; $f \in L^2(\Omega)$ 是源项; $k \in L^\infty(\Omega)$ 是扩散系数且 $k \geq 0$; $c \in [L^\infty(\Omega)]^d$ 是一光滑速度场。 Γ_D 的 $d-1$ 维勒贝格测度不为 0 且 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, 同时 $\Gamma_D \cap \Gamma_N$ 的 $d-1$ 维勒贝格测度为 0。

1.2 方程的离散

为了离散方程(1a),首先要用一系列互不重叠的单元来近似求解区域 Ω ,记这些单元的集合为 τ_h ,则 $\Omega_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$ 是近似的求解区域。定义内部交界面的集合为 \mathcal{E}_h^0 , 边界的集合为 \mathcal{E}_h^∂ , 同时定义 $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^0 \cup \mathcal{E}_h^\partial$ 。进一步定义为:

$$\Gamma_h^0 = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_h^0} e, \quad \Gamma_h^\partial = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_h^\partial} e, \quad \Gamma_h = \Gamma_h^0 \cup \Gamma_h^\partial \quad (2)$$

根据间断有限元的特点,近似解 u_h 应该是在单元内连续,单元间间断的多项式函数,因此

$$u_h \in V_h = \{v_h \in L^2(\Omega_h) : v_h|_K \in P_k(K) \forall K \in \tau_h\} \quad (3)$$

$P_k(K)$ 是定义在单元 K 上的次数不大于 k 的多项式空间。故可定义几个符号如下:

$$\begin{aligned} \llbracket v_h \rrbracket &= v_h^+ n^+ + v_h^- n^-, \quad \{v_h\} = 0.5(v_h^+ + v_h^-), \\ \{v_h\} &= 0.5(v_h^+ + v_h^-) \end{aligned} \quad (4)$$

1.2.1 对流项的离散

各种间断有限元方法对于对流项的离散基本一致, 就是利用了物理量沿着特征线传播, 下游单元的物理量由上游单元所决定的特性。在任一单元内加权积分:

$$\begin{aligned} \int_K v_h \nabla \cdot (c u_h) dV &= \int_K \nabla \cdot (c v_h u_h) dV - \int_K \nabla v_h \cdot (c u_h) dV = \\ &= \int_{\partial K} v_h \overline{c \cdot n u_h} dS - \int_K \nabla v_h \cdot c u_h dV \end{aligned} \quad (5)$$

$$\overline{c \cdot n u_h} = 0.5(c \cdot n + |c \cdot n|) u_h + 0.5(c \cdot n - |c \cdot n|) u_h^- \quad (6)$$

其中: u_h 和 u_h^- 是 K 单元及其相邻单元的解; n 是单元 K 的单位外法线向量; v_h 是权函数。通过 $\overline{c \cdot n u_h}$ 的定义实现了对流项的迎风处理, 而且表达式 (6) 中的格式也被称为标准迎风格式^[10], 常用的还有 Local Lax-Friedrichs 格式^[10]。把方程 (5) 中的积分区域改为整个近似求解域, 可以得到对流项的弱解形式为

$$-\int_{\Omega_h} \nabla v_h \cdot c u_h dV + \int_{\Gamma_h} \llbracket v_h \rrbracket \cdot c \hat{u}_h dS \quad (7)$$

式中 \hat{u}_h 的取值可由式 (6) 确定。

1.2.2 扩散项的离散

本文采用 Bassi 等^[8]提出的方法对扩散 $\alpha(\cdot, \cdot)$ 项进行离散, 该方法的核心就是加入一个双线性算子作为罚函数。具体的弱解形式为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} k(\nabla v_h) \cdot (\nabla u_h) dV - \int_{\Gamma_h} k(\llbracket v_h \rrbracket) \cdot \{\nabla u_h\} + \\ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\nabla v_h\} dS + \alpha(v_h, u_h) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $-\int_{\Gamma_h} k(\llbracket u_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v_h\} dS$ 的加入是为了保证扩散项离散后的矩阵形式是对称的。双线性算子就是罚

函数项, 具体可定义为

$$\alpha(v_h, u_h) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \eta_e \int_{\Omega_h} r_e(\llbracket v_h \rrbracket) \cdot r_e(\llbracket u_h \rrbracket) dV \quad (9)$$

式中 η_e 是稳定系数。只要 η_e 大于等于单元的边界数, 该方法就是收敛的^[8], 线性算子 $r_e : [L^2(e)]^d \rightarrow [V_h]^d$ 可按照下面的方程定义为:

$$\int_{\Omega_h} r_e(\psi) \cdot v_h dV = - \int_e \psi \cdot \{v_h\} dS \quad (10a)$$

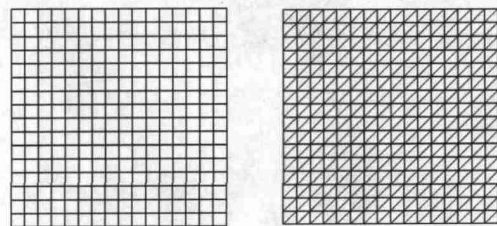
$$\forall v_h \in [V_h]^d, \psi \in [L^2(e)]^d \quad (10b)$$

1.2.3 对流扩散方程的弱解形式

用隐式欧拉方法离散时间项, 加上源项, 可以得到对流扩散方程的弱解形式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_h} v_h u_h^{n+1} dV - \int_{\Omega_h} \nabla v_h \cdot c u_h^{n+1} dV + \int_{\Gamma_h} \llbracket v_h \rrbracket \cdot c \hat{u}_h^{n+1} dS + \\ \int_{\Omega_h} k(\nabla v_h) \cdot (\nabla u_h^{n+1}) dV - \int_{\Gamma_h} k(\llbracket v_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v_h^{n+1}\} + \\ \llbracket u_h^{n+1} \rrbracket \cdot \{\nabla v_h\} dS + \alpha(v_h, u_h^{n+1}) = \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega_h} v_h u_h^n dV + \int_{\Omega_h} v_h f dV \end{aligned} \quad (11)$$

其中上标 n 和 $n+1$ 表示第 n 和 $n+1$ 时间步, 对于定常对流扩散方程, 去掉时间项即可。



(a) 四边形网格

(b) 三角形网格

图 1 两种不同类型的网格 ($h=1/16$)

Fig.1. 2 types of mesh ($h=1/16$)

2 数值算例

本文采用两种类型的网格对算例进行计算 (如图 1 所示), 并定义 h 为单元的最小边长。同时在

表 1 算例一的计算结果
Table 1. Result of example 1

四边形网格				三角形网格			
插值函数	1/h	err _{L²(Ω)}	Order	插值函数	1/h	err _{L²(Ω)}	Order
双线性	16	5.20×10 ⁻³	--	线性	16	3.95×10 ⁻³	--
	32	1.28×10 ⁻³	2.02		32	1.00×10 ⁻³	1.99
	64	3.18×10 ⁻⁴	2.01		64	2.52×10 ⁻⁴	1.99
双二次	8	1.27×10 ⁻³	--	二次	8	9.97×10 ⁻⁴	--
	16	1.56×10 ⁻⁴	3.03		16	1.25×10 ⁻⁴	2.99
	32	1.92×10 ⁻⁵	3.02		32	1.60×10 ⁻⁵	2.97

表 2 算例二的计算结果
Table 2. Result of example 2

四边形网格				三角形网格			
插值函数	1/h	err _{L²(Ω)}	Order	插值函数	1/h	err _{L²(Ω)}	Order
双线性	16	9.38×10 ⁻²	--	线性	16	8.02×10 ⁻²	--
	32	2.24×10 ⁻²	2.05		32	2.01×10 ⁻²	2.00
	64	5.51×10 ⁻³	2.02		64	5.04×10 ⁻³	2.00
双二次	8	2.10×10 ⁻²	--	二次	8	1.97×10 ⁻²	--
	16	2.49×10 ⁻³	3.08		16	2.46×10 ⁻³	3.00
	32	3.02×10 ⁻⁴	3.04		32	3.12×10 ⁻⁴	2.98

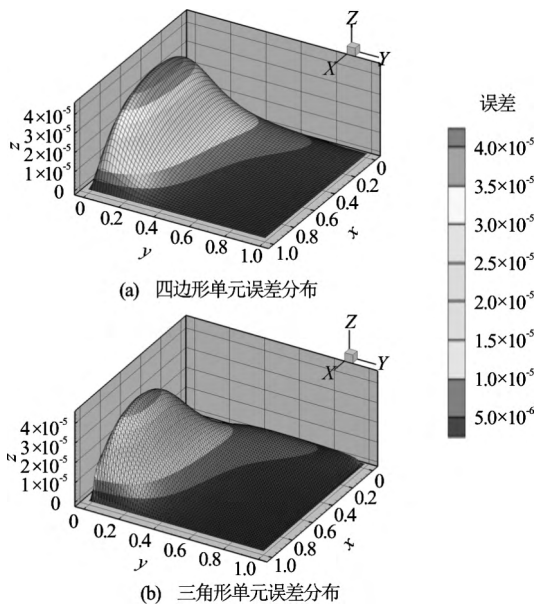


图 2 算例一的误差分布 (h=1/32)
Fig.2. Error distribution of example 1 (h=1/32)

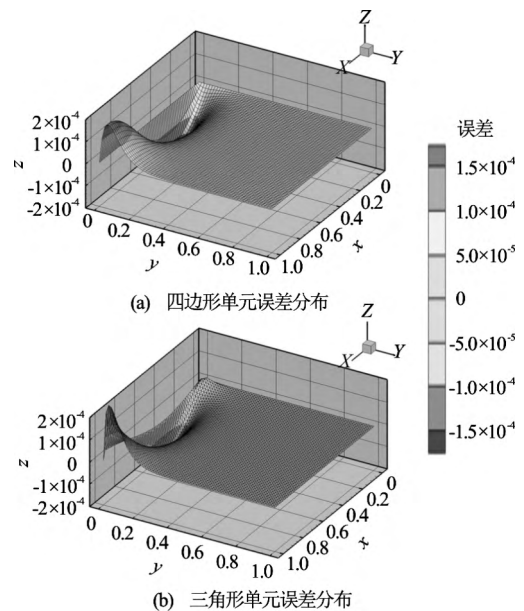
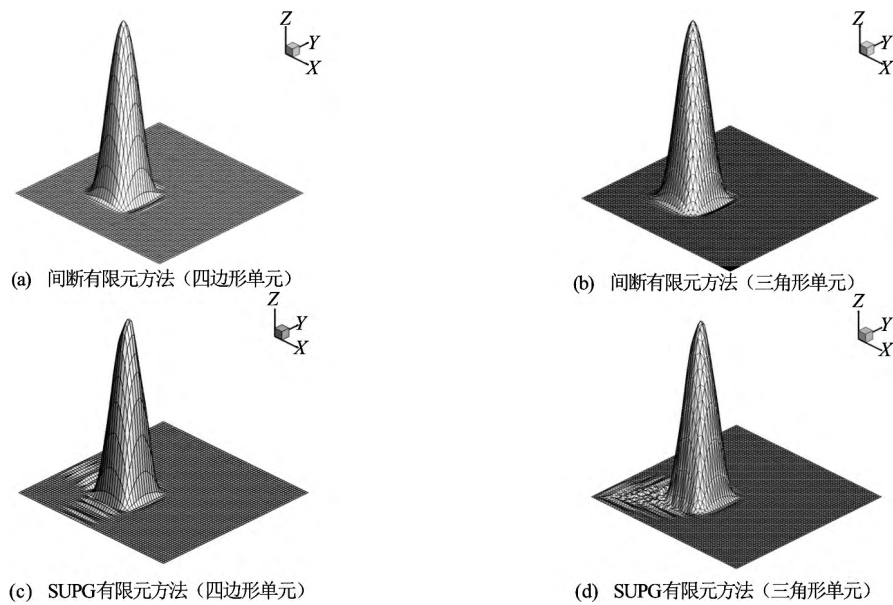


图 3 算例二的误差分布 (h=1/32)
Fig.3. Error distribution of example 2 (h=1/32)

$$L^2(\Omega) \text{ 中定义相对误差 } \text{err}_{L^2(\Omega)} = \frac{\|u_{\text{exact}} - u_h\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{\text{exact}}\|_{L^2(\Omega)}}$$

2.1 算例一：带第一类边界条件的定常对流扩散方程

计算区域为 $\Omega = (0, 1)^2$ ，令 $k = 1, c = (-5, -10)$ ，

图4 算例3的计算结果 ($T = 0.25$ s)Fig.4. Result of example 3 ($T = 0.25$ s)

$f = 0$, 而边界条件为 $g_D = \left(\frac{1 - e^{-5x}}{1 - e^{-5}} \right) \left(\frac{1 - e^{-10y}}{1 - e^{-10}} \right)$ 。同

时 $\left(\frac{1 - e^{-5x}}{1 - e^{-5}} \right) \left(\frac{1 - e^{-10y}}{1 - e^{-10}} \right)$ 也是方程的精确解, 计算结

果如表1所示。图2给出了误差分布, 由于程序在输出计算结果时把一个二阶单元的解分为四个一阶单元输出, 所以从图上看网格较密。从计算结果可以看出无论是四边形网格还是三角形网格, 在使用P阶单元时, 都可以达到P+1阶的收敛阶数。这正是间断有限元方法特有的优点, 就是可以使用较稀疏的网格而采用高阶的插值函数获取更好的精度。另外数值实验的结果表明如果采用 $h = a$ 的二阶单元要比 $h = a/2$ 的一阶单元效率更高。

2.2 算例二: 带第一类和第二类边界条件的定常对流扩散方程

计算区域为 $\Omega = (0, 1)^2$, 令 $k = 1$, $c = (0, -20 + 9\pi^2/80)$, $f = 0$, 而边界条件为 $u(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$,

$u(x, 1) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \exp(-20)$, $u(0, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(1, y) =$

0。方程的精确解为 $u = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \exp(-20y)$, 计算

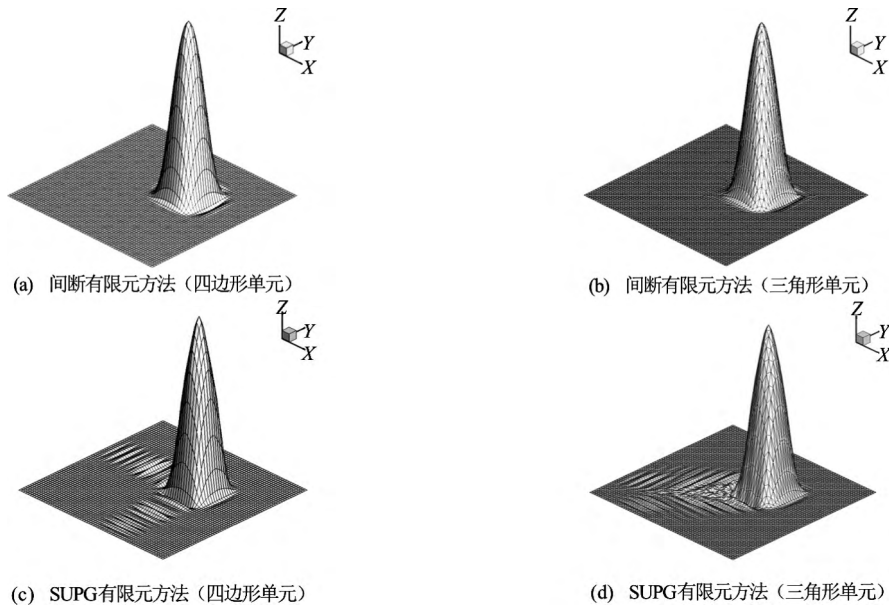
结果如表2和图3所示。该算例表明了对于第一类和第二类边界条件同时存在的问题, 该方法也同样可以得到较高的收敛精度, 和算例一相同, p阶单元的空间离散精度可以达到p+1阶。

2.3 算例三: 非定常对流扩散方程

计算区域为 $\Omega = (0, 1)^2$, 令 $k = 1e-15$, $c = (1, 1)$, $f = 0$, 边界条件为 $u(x, 0) = 0$, $u(0, y) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(x, 1) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}(1, y) = 0$, 时间步长取 $\Delta t = 1.25e-4$ 。方程的初始条件为:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} \sin(4\pi x) \sin(4\pi y), & 0 < x < 0.25, \\ & 0 < y < 0.25 \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (12)$$

由于算法的耗散通常和算法的构造方式以及函数本身二阶及以上的导数相关, 本算例虽然函数初值本身是连续的, 函数的偏导却是不连续的, 并且这里给出了一个极小的扩散系数, 这样可以验证数值耗散的大小, 该算例采用 $h = 1/64$ 的线性插值的三角形单元网格和双线性插值的四边形单元网格进行了计算, 并且把计算结果与使用SUPG有限元方法的结果进行了对比(见图4和图5)。由于初始解是有间断性质的, 为了使得在计算的过程中沿着时间方向的耗散较小, 在此取了比较小的时间步长 $\Delta t = 1.25e-4$, 在这样的时间步长下, 间断有限元算出的结果是比较稳定的, 而且从图上也可以看出解的形状保持的很好。而同样的时间步长下, SUPG有限元方法则产生了数值震荡, 而且震荡产生的位置正好是在偏导不连续的地方, 震荡传播的方式也和网格形式有很大关系。由此说明了间断有限元方法对于对流占主导并且存在一定的间断性

图 5 算例 3 的计算结果 ($T = 0.5$)Fig.5. Result of example 3 ($T = 0.5$)

质的问题，可以得到比较好的结果，也可以说明间断有限元方法对网格形式的依赖程度较小。

此表示衷心感谢。

3 结论

本文构建了一种新的间断有限元方法对对流扩散方程进行数值求解，选择了几个典型算例进行了计算，包括有精确解的带第一类和第二类边界条件的对流扩散方程，以及带间断初始条件的对流扩散方程。数值计算结果表明：

(1) 该方法对于不同类型的网格适应性较好。

(2) 该方法在采用 P 阶单元时可以达到 $P+1$ 阶精度，采用高阶插值函数的空间离散精度较传统方法更高。

(3) 该方法数值耗散较小，在求解强对流强间断问题时体现出传统方法无法比拟的优势。

此外，本文的方法相对于 LDG 和 HDG 方法而言改善了计算效率，但是由于间断有限元方法的特点，相对于传统方法而言计算效率还是偏低。可以通过采用较为稀疏的网格结合高阶插值函数的方式获得计算精度和效率的提高来解决这一问题，也可以通过并行计算的方式来提高计算效率，日后将开展这部分研究工作。

致谢

本文研究工作得到了工信部高技术船舶科研项目以及上海交通大学高性能计算中心的资助，在

参 考 文 献:

- [1] SHUKLA A, SINGH A K, SINGH P. A comparative study of finite volume method and finite difference method for convection-diffusion problem[J]. American Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 1(2): 67-73.
- [2] TEZDUYAR T E, GANJOO D K. Petrov-Galerkin formulations with weighting functions dependent upon spatial and temporal discretization: Applications to transient convection-diffusion problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, 59(1): 49-71.
- [3] COCKBURN B, SHU C W. The local discontinuous Galerkin time-dependent method for convection-diffusion systems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(6): 2440-2463.
- [4] COCKBURN B, LIN S Y, SHU C W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems[J]. Journal of Computational Physics, 1989, 84(1): 90-113.
- [5] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 545-581.

- [6] COCKBURN B, GOPALAKRISHNAN J, LAZAROV R. Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed and continuous Galerkin methods for second-order elliptic problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, 47(2): 1319-1365.
- [7] NGUYEN N C, PERAIRE J, COCKBURN B. An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection-diffusion equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(9): 3232-3254.
- [8] BASSI F, REBAY S, MARIOTTI G, et al. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows[C]. *Proceedings of 2nd European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics*. Technologisch Instituut, Antwerpen, Belgium, 1997, 99-108.
- [9] CASTILLO P, COCKBURN B, PERUGIA I, et al. An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000, 38(5): 1676-1706.
- [10] LI B Q. *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*[M]. London, UK: Springer, 2006.
- [11] REED W H, HILL T R. *Triangular mesh methods for the Neutron transport equation*[R]. Los Alamos Scientific Laboratory, USA, 1973.
- [12] COCKBURN B, DONG B, GUZMAN J, et al. A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(5): 3827-3846.